Esercizio sugli spazi di Sobolev

Sia Ω un aperto (non necessariamente limitato) in $\mathbb{R}^d$.

- Diciamo che Ω ha la proprietà (P), se esiste una costante $C_P > 0$ tale che vale la seguente disuguaglianza di Poincaré
$$\int_\Omega u^2\,dx \le C_P \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \quad \text{per ogni} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$
- Diciamo che Ω ha la proprietà (λ_1) se esiste una funzione $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ che risolve il problema variazionale
$$\min\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \ :\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^2\,dx = 1\Big\}.$$
- Diciamo che Ω ha la proprietà (C), se l'inclusione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta.

Esercizio 1. Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, dire quali fra le seguenti applicazioni sono vere:

- (P) $\Rightarrow$ (C);
- (P) $\Rightarrow$ (λ_1);
- (C) $\Rightarrow$ (P);
- (C) $\Rightarrow$ (λ_1);
- (λ_1) $\Rightarrow$ (C);
- (λ_1) $\Rightarrow$ (P).